

ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE
U BERTIĆEVU DJELU
»SAMOUKA POKUS PERVI« IZ GOD. 1847.

Žarko Dadić

U Danici ilirskoj god 1846. *Vatroslav Bertić*¹ je najavio da će objaviti matematičku knjigu koju je napisao na sasvim drugim načelima nego što su one koje su obično u upotrebi.² To bi trebala biti ujedno i prva matematička knjiga na hrvatskom jeziku nakon hrvatskoga narodnog preporoda jer su do tada postojale samo neke dijalektalne matematičke knjige, i to u vrlo malom broju.

Bertić je nezadovoljan metodičkim pristupom u onim knjigama koje se upotrebljavaju u Hrvatskoj, ali i mnogih stranih. Prvenstveno se Bertić ne slaže da se u školskom udžbeniku ide po svim onim teškim stranputicama kojima su nekoč išli Euklid, Arhimed, Apolonije, Pitagora i dr., premda su nam kasniji učenjaci kao Leibniz pronašli mnogo kraći put kojim se mogu dokučiti iste istine. Prema Bertiću je Littrow³ prvi udario prijekim putem i izbjegao sve nepotrebne matematičke tvrdnje u elementarnom izlaganju.

Sadržaj knjižice, koju je Bertić namjeravao objaviti, naveden je u Danici ilirskoj god. 1846.⁴ Ta knjižica pod nazivom *Samouk* trebala bi imati pet poglavlja čiji su podnaslovi potanko nave-

¹ O Vatroslavu Bertiću za sada ne znamo gotovo ništa. Nije poznato niti kakvim se poslom bavio u Budimu posljednjih godina prve polovine 19. stoljeća odakle je slao svoje članke Danici ilirskoj god. 1846. o položaju matematike u hrvatskom društvu preporodnog razdoblja. Zbog zanimljivosti njegovih tekstova bit će korisno istražiti život i djelovanje ove ličnosti koja se inače ovdje spominje prvi put.

² Danica horvatska, slavonska i dalmatinska, tečaj XII, god. 1846, br. 43, str. 172—148.

³ J. J. Littrow: Kurze Anleitung zur gesammten Mathematik, Wien, 1838.

⁴ V. Bertić, Književna vijest, Danica horvatska, slavonska i dalmatinska, tečaj XII, god. 1846, br. 43, str. 174.

deni, ali se iz njih ne vidi u čemu je bit Bertićeve metode. Ta se samo može naslutiti iz istog teksta u Danici ilirskoj, u kojem Bertić inzistira na napuštanju izlaganja matematike po onom redu kako su pojedini rezultati dobiveni. To posebno vrijedi za odvajanje aritmetike od algebre. Nikako ne valja najprije izlagati aritmetiku, a onda algebru. Treba ih što više zajedno stopiti.

Bertićeva knjižica je doista izašla god. 1847. u Pešti pod nazivom *Samouka pokus prvi*, ali je ona sadržavala samo prvo poglavlje i dio drugoga od onog što je bilo najavljeno u Danici ilirskoj. Razlog objavljivanju samo prvog sveščića tog djela nalazi se u činjenici da je Bertić svoje djelo pokušao objaviti pretplatom, a pristigla sredstva nisu bila dovoljna za cijelo djelo. Na koricama tog sveščića on potiče na pretplatu za ostale sveščiće »nebili što prije svijet ugledalo ono, što je još obećanoga preostalo«.

Knjiga J. J. Littrowa koju spominje Bertić trebala bi dakle biti glavni njegov putokaz u stvaranju matematičkog udžbenika. Međutim, usporedba Bertićeve i Littrowljeve knjige pokazuje da između njih postoji mnogo razlika. Littrow je na početku svoje knjige pretpostavio poznavanje zbrajanja, odbijanja, množenja i dijeljenja s cijelim brojevima, pa je u uvodu svog djela samo objasnio te računске operacije s razlomcima, koji za brojnik i nazivnik imaju posebne brojeve. Nakon toga Littrow glavni dio knjige počinje s računskim operacijama s algebarskim izrazima, da bi konačno izložio glavne pojmove algebre i geometrije. Ovo djelo dakle samo djelomično ispunja ono što je Bertić želio. Bertićevu pohvalu toga djela trebalo bi zato shvatiti samo u smislu napuštanja starog metodskog pristupa izlaganju matematike, koji je bio i u to doba još jako raširen.

Bertić međutim hoće mnogo više. On neće samo promjenu metodskog pristupa nego i metodološkog. Na njega zato mnogo više utječe Leibniz nego Littrow, a to će se vidjeti u toku slijedećeg izlaganja znatno bolje. Bertiću nije naime dovoljno da sjedini aritmetiku i algebru nego on hoće da napravi još jedan korak dalje, da u simbolima vidi pojmove, da u relacijama algebarskih simbola vidi relacije pojmova i misli.

Tako on u svojoj knjizi polazi od razmatranja pojmova, svojstava i istina. Saopćavanje tih pojmova vrši se s pomoću nekih simbola koji su općenito uzevši vrlo različiti, pa se razlikuju u razgovoru gluhonijemih i u razgovoru običnih ljudi. Naše pak misli mogu se po dogovoru izraziti pismenim i drugim znakovima. On kaže: »Znake takove prije razumijevanja poznavati valja, to jest treba znati, koju misao, kakvu li stvar misli onaj, koi se snama razgovara, pri izgovaranju, pisanju ili slaganju različnih zname-

njah, kojima na različne svrhe želi ganuti dušu našu.«⁵ Te znakove možemo izabrati po volji, ali za temelj se mora postaviti načelo:⁶

I₁ *Svaku misao i pojam i to bilo koje stvari i njezina svojstva moguće je predočiti jednim znakom.*

A tada i obrnuto:

I₂ *U jednom po volji odabranom znaku moguće je gledati misao i pojam.*

Ovakvo načelo omogućit će nam »obustavljene ovako misli snizavati, uspoređivati i pred očima razređene u svakojake načine razvijati, u nove jih skladati slike, a iz ovih pronicat će nam nove misli, po kojima često u stanje dolazimo pojmiti ono, što nezalici vijekom neviđeno čudo ostaje«.⁷

Ta tvrdnja jasno pokazuje što Bertić hoće. Pojmovi će najprije biti predočeni formalistički matematičkim simbolima, a onda će se matematičkim transformacijama doći do znakova koje će obrnuto biti moguće pridružiti pojmovima i tako ćemo doći do novih misli i rezultata. Matematički formalizam pomoći će dakle da se izvedu i logičke operacije s pojmovima.

Pridruživanje pojmova simbolima Bertić vrši na ovaj način:⁸

Ako neki (x) osjetimo, hoćemo znati što je taj (x). Mi mu doznajemo kvalitete i njegova prirodna svojstva i konstatiramo da je to *stvar*. Uočimo sada mnoštvo stvari i istaknimo između njih taj (x). Taj isti (x) nazovimo imenom (a) da bi se razlikovao od drugih stvari koje imaju druga prirodna svojstva. Dakle (x) i (a) su dva znaka za istovrsna svojstva ili dva znaka za istu stvar. Ta *istina* označuje se znakom (=) koji će se nazvati *znakom istine*. Izraz pak (x) = (a) nazvat će se zato *izrazom istine* jer je istina ono što u takvu izrazu gledamo. Za to evo i primjera. Neka je izrečena *istina*:

To je čovjek

pa neka se prijeđe na odgovarajuće znakove

umjesto (to) nek se stavi (x)

umjesto (čovjek) nek se stavi (a)

umjesto (je) nek se stavi (=)

Tad je gornja istina simbolički pisana:

(x) = (a)

Taj izraz istine znači isto što i »to je čovjek«.

⁵ V. Bertić, Samouka pokus prvi, Pešta, 1847, str. 10.

⁶ V. Bertić, isto, str. 10—11.

⁷ V. Bertić, isto, str. 11.

⁸ V. Bertić, isto, str. 11—14.

U toj tvrdnji imali smo povezane stvari potpuno istih svojstava, pa je primijenjeno načelo:⁹

II *Što je istovrsno, zamijeniti se može.*

Ali postoji znatna teškoća da se odrede sva svojstva jedne stvari, pa će se moći istaknuti samo neka svojstva stvari, i to samo ona koja mogu dokučiti ljudske mogućnosti. Pogotovo će trebati istaknuti ponekad samo jedno svojstvo. Zato ovo načelo treba proširiti i na slučajeve kad se dva pojma podudaraju samo u jednom učenom svojstvu, a druga svojstva se mogu i mnogo razlikovati. Što je onda neka stvar, Bertić piše:

»Pamtiti naime valja, da na pitanje *što?* još odgovorili nismo, nego da smo se samo o nekih vlastitostih stvari izvjestili, zmeđu kojih opet ovu ili onu osobito pazimo; može pako biti, da neke stvari posred inih sasvim različnih (n. pr. na oko) vlastitostih, jednu imadu, u kojoj se posve slažu; takove stvari, glede iste vlastitosti, velimo da su svejedne.«¹⁰

Jedan čovjek može biti vrlo različit od drugoga, ali se može složiti da svi imaju istu slabost. To je sadržano u uzrečici:

čovjek je čovjek

ali umjesto toga se može kao prije napisati:

(a) = (a)

isto vrijedi i za uzrečicu:

novac je novac

koja se može pisati u simboličnom obliku

(b) = (b)

ako se misli na istu vrijednost novca.

Međutim te su istine u svemu jednake, »velimo da su *očevidne* ili *očite*, i po sebi ništa nekažu, jer kad ja velim na pr. *čovjek je čovjek*, tko bi znao da ja istu slabost ljudi ili u izgovoru: *novac je novac* istu vrijednost novcah mislim?«¹¹

Zato bi ispravno bilo da se označi svojstvo jednoga i drugoga čovjeka i onda utvrdi da su jednake. Tako

(slabost jednog čovjeka) = (m)

(slabost drugoga čovjeka) = (M)

a onda utvrdi da su one jednake

(m) = (M)

⁹ V. Bertić, isto, str. 14.

¹⁰ V. Bertić, isto, str. 14.

¹¹ V. Bertić, isto, str. 15.

Nakon što je izložio ta načela u prvom dijelu knjige, Bertić uvodi u drugom eksplicite skupovne pojmove iako su oni već ranije bili implicite sadržani.

Ako bi uočili istu stvar više puta ili promatrali više istovrsnih stvari, onda bi imali ovakav red primijenivši načelo I₁:

$$a a a a a a a \dots a a a a$$

»Svaki redak priličan ovomu, u kojemu piknje (...) znače, da pismenah »a« još koliko mu drago primisliti treba, spominjao bi množinu stvari (a) nekakovih svejednih, kao što je na pr. množina zvjezdah na nebu, množina rastja u šumi; množina ljudih u cerkvi itd.«¹²

Dakle a a a a a a ... a a a a a može biti množina zvijezda, ptica, jabuka. Ta se množina može uzeti da je m . A onda zbog poznatih načela može se pisati:

$$a a a a a \dots a a a a a = m \cdot a$$

Taj niz s lijeve strane Bertić je neprikladno napisao. To bi zapravo trebalo biti:

$$a + a + a + a + a + \dots + a + a + a + a = m \cdot a$$

a m bi onda označavao broj članova skupa. Tako je Bertić i mislio, pa tako dalje i postupao. Da bi postigao svoj cilj promatranja posebnih brojeva u ovim općim, on promatra množinu od jednog elementa, dva elementa, tri elementa itd. pa dobiva $1 \cdot a$, $2a$, $3a \dots$. Ono što se nalazi u daljnjem tekstu drugog poglavlja ove knjižice pripada sada promatranju cijelih brojeva.¹³

Bertić u svom izlaganju bez sumnje ima neke elemente matematičke logike iako sam nije išao za tim da postavi bilo kakvu teoriju matematičke logike. On je pod utjecajem Leibniza koji je predočio pojmove brojevima, a onda algebarskim veličinama.¹⁴ Iako je Leibnizova teorija znatno šira i znatno većeg dometa nego Bertićevi implicite sadržani pojmovi te teorije, ipak jer Bertić u stanovitom pogledu bliži Booleu, koji je svoju teoriju matematičke logike iznio u članku *The mathematical analysis of logic*

¹² V. Bertić, isto, str. 17—18.

¹³ V. Bertić, isto, str. 18—24.

¹⁴ Leibniz je tijekom cijelog života unapređivao svoje poglede iz matematičke logike. Već u svom djelu *De Arte Combinatoria* (1666) on je pridruživao pojmove prirodnim brojevima, a nakon toga je razrađujući temeljnu ideju dolazio sve do novih i novih spoznaja. Najzreliji rezultat njegova rada sadržan je u dva fragmenta koja je najvjerojatnije napisao poslije god. 1685. Ti su fragmenti ostali u rukopisu, a objavio ih je prvi put K. J. Gerhardt u *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, Berlin, 1875—1890, i to u sedmom svesku *Scientia Generalis*, *Characteristica* kao XIX i XX fragment. Te fragmente, koji predstavljaju konačni oblik Leibnizove teorije, Bertić najvjerojatnije nije poznavao nego samo temeljnu Leibnizovu ideju.

(*Matematička analiza logike*) god. 1847.¹⁵ Ta Booleova rasprava, kao što je poznato, znači početak nove ere matematičke logike, ali Bertić za nju nije mogao znati jer je svoje djelo dovršio god. 1846.¹⁶

Boole je zamislio univerzum svih pojmova, a pojedine individualne članove u tom univerzumu grupirao je u klase iste kvalitete. Te je klase označio simbolima. Prema Booleu, isti individualni član može biti u više klasa jer može imati više raznih kvaliteta. Nadalje je on zamislio operaciju izbora članova u nekom subjektu. Iz tih pojmova je izveo i operacije s takvim skupovima (klasama) i došao do svojih zakona matematičke logike. Razlika između Boolea i Leibniza bila je velika jer je Boole promatrao skupove pojmova i s njima izvodio operacije s najvećom mogućom jasnoćom, a nije samo matematički interpretirao logiku kao Leibniz.

Iz prethodnog izlaganja jasno je da Bertić ima implicite mnoge elemente matematičke logike koju je formulirao Boole. Da bi to bilo jasno, evo Bertićevih tvrdnji u usporedbi s Booleovim.

Boole zamišlja univerzum pojmova, što Bertić nema ali se taj donekle može prepoznati u Bertićevoj tvrdnji da se »svaki pojam« dade označiti simbolom. Boole prikazuje pojmove simbolima, a to čini i Bertić kad tvrdi da svaki pojam i misao kakve god stvari može biti predočen simbolom (str. 10). Boole uzima da svi pojmovi imaju kvalitete, a Bertić slično tvrdi da sve stvari imaju kvalitete ili svojstva, upotrebljavajući za svojstvo starohrvatski izraz »vlastitost« (passim). Boole dalje vrši izbor prema istoj kvaliteti i dobiva tako klase pojmova. Bertić radi isto jer kaže da između mnoštva raznih svojstava stvari »ovu ili onu osobito pazimo« (str. 14). Konačno, Bertić prema tom istom svojstvu grupira stvari u *množine*, npr. množina zvijezda na nebu, množina drveća u šumi, množina ptica i dr. (str. 18). Množine kod Bertića ili klase kod Boolea su skupovi, pa Boole s njima vrši operacije. U Bertićevu tekstu nema operacija s takvim skupovima, pa tako ne znamo ništa o načinu na koji je Bertić primijenio svoja načela na računske operacije. Naime operacije zbrajanja, odbijanja, množenja i dijeljenja, u kojima su se mogla odraziti navedena načela, našle su se u petom poglavlju knjige koje je zajedno s trećim i četvrtim ostalo u rukopisu i nije nam poznato.

¹⁵ George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*, 1847. Tekst je objavljen i u djelu Henrietta Midonick, *The Treasury of Mathematics*, sv. 2, London, 1968, Penguin Books, str. 245—253.

¹⁶ To se zaključuje po tome što je Bertić na omotu označio da je napomenu o objavljivanju sveščića napisao uoči mlada ljeta 1847.

Međutim, usprkos činjenice da se u Bertićevu djelu nalaze neki elementi matematičke logike, on nije mogao u tim svojim izlaganjima doći do rezultata do kojih je došao Boole, jer on za razliku od Boolea nije stvarao svjesno sustav matematičke logike. Nije mogao tako doći ni do zakona matematičke logike (tzv. Booleovi zakoni), po kojima je ona postala teorijom. Bertić se zato ne može smatrati tvorcem bilo koje vrste matematičke logike kao matematičke discipline. Ali bez obzira na to, Bertićeva korelacija pojmova i simbola predstavlja bitni preduvjet takve teorije. A u tom pogledu Bertić je bio na čistu, pa čak i donekle samostalan ako se usporede njegovi rezultati s Leibnizovim. Zato se Bertićevo izlaganje mora smatrati jednim od onih napora koji su i doveli do te teorije.

Summary

ELEMENTS OF MATHEMATICAL LOGIC IN BERTIĆ'S WORK »SAMOUKA POKUS PERVI« (FIRST ATTEMPT OF THE SELF EDUCATED PERSON) FROM THE YEAR 1847.

Bertić wrote only two articles and the booklet *Samouka pokus pervi* printed in Pest in 1847. In this booklet Bertić considers concepts, proprieties and truths, and asserts that every concept can be represented by a sign, and that it is possible to put these signs into mutual relations. Then we can make formal mathematical transformations corresponding to the development of thought and come to new relations of signs which it is possible to interpret as concepts.

Bertić was under the influence of Leibniz' first treatises in the field of mathematical logic, but not under the influence of later treatises since they were not published before the second half of the 19th century. Bertić's booklet was written in 1846 (published in 1847) and so he could not use Boole's treatise *The Mathematical Analysis of Logic* published in 1847.

In spite of this Bertić's booklet contains some elements of mathematical logic as presented by Boole. Namely, Boole considers the Universe of concepts which are represented by signs. Bertić does not consider the concept of the Universe, but he claims that every concept can be represented by a sign. So, both of them represent concepts with signs. After that Boole and Bertić choose the concepts which have one or more qualities in common, and so they form sets of concepts. This explanation of Ber-

tić's is contained in the first part of his book, published in 1847. In the fifth part, never published and unknown, Bertić operates with signs and probably with concepts, but we cannot know in which manner he deals with them. In spite of this it is sure that Bertić did not master the laws of mathematical logic, and so his book does not contain the theory of mathematical logic, but only elements of it.